מרצה: עמית נוביק

ע"י שחר דייוס

משפט הגבול המרכזי

נתונות n דגימות, כל דגימה

x_i היא משתנה מקרי כך ש:

$$V(x_i)=\sigma^2 \quad E(x_i)=\mu$$

אם $n\geq 30$ מספיק גדול אז

סכום הדגימות

$$\boxed{\sum x_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)}$$

$$E(\bar{x})=E\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum x_i\right)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad V(\bar{x})=V\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)=\frac{1}{n^2}V\left(\sum x_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

ממוצע

$$\boxed{\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)}$$

מקרה פרטי - בינומי

-הסתברות p להצלחה

$x_i=k$	0	1
$P(x_i=k)$	$1-p$	p
	לא ניצחון	ניצחון

$$x_i=\begin{cases}0 & \text{לא ניצחון}\\ 1 & \text{ניצחון}\end{cases}$$

$$E(x_i)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$

$$V(x_i)=E(x_i^2)-[E(x_i)]^2=0^2(1-p)+1^2\cdot p-p^2=p-p^2=p(1-p)$$

אם n גדול מספיק, לפי משפט הגבול המרכזי

$$\sum_{i=1}^{n}x_i \sim N(np, n\cdot p(1-p))$$

נגדיר כעת x מספר הניצחונות מתוך n דגימות

$$X\sim B(n,p)$$

$$X=\sum x_i$$

במקרה הבינומי

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{אם } np>5,\ n(1-p)>5 \\ \text{אז} \\ X\sim N(np, np(1-p))\end{array}}$$

תיקון רציפות

* מה עשינו?

לקחנו אוכלוסיה עם פרופורציה נתונה p ודגמנו ממנה.

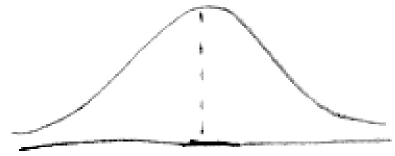
$X\sim B(n,p)$ וגם בקירוב: $X\sim N(np,\ np(1-p))$

$\downarrow$

$E(X)=\sum k_i\cdot P(X=k_i)$

$\downarrow$

$E(X)=np$



$\mu=np$

ההצגה הנורמלית מאפשרת לחשב בקלות את השטח לקבל תחום ערכים

a b

אחוז הנבדקים שמצא X בין a ל-b

אבל, $X\sim B$ משתנה בדיד - יש שטח מוגדר ל- $P(X=k)$

$X\sim N$ משתנה רציף - השטח ל- $P(X=k)$ הוא 0.

ולכן נעשה תיקון רציפות כשעוברים להתפלגות נורמלית:

$P(X=74) = P(73.5<X<74.5)$

ערך בדיד ... תיקון רציפות

$P(69\leq X<77) = P(68.5<X\leq 76.5)$

תיקון רציפות

---

* לא נעשה תיקון רציפות לפרופורציה

$\bar X=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{X}{n}=\frac{\text{מספר ההצלחות}}{\text{גודל המדגם}}=$ פרופורציית ההצלחות במדגם $=\hat p$

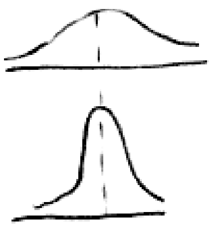
$\bar X\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

אם $np>5,\ n(1-p)>5$

אז

$\boxed{\hat p\sim N\left(p,\frac{p(1-p)}{n}\right)}$

התפלגות $\hat p$ / $\bar X$ במדגם קטן



במדגמים גדולים

חוק המספרים הגדולים:

ככל שהמדגם גדול יותר הפעמון קטן וצר יותר ומרכז את $\hat p$ ו- $\bar X$ סביב התוחלת

עד עכשיו הייתה נתונה הפרופורציה באוכלוסיה וניבאנו לגבי הסבירות לתוצאות האפשריות של פרופורציות המדגם.
כאשר p, הפרופורציה באוכלוסיה לא ידוע נאמוד אז $\hat{p}$, הפרופורציה במדגם.

* כש-p לא ידוע תנאי לשימוש הגבול המרכזי, במקרה הבינומי $n \geq 30$

אומד / אומדן
$\hat{p} = W$

טעות האמידה $|\hat{p} - p|$

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

כש-p לא ידוע נחליף ב-$\hat{p}$ ואז בקירוב:

$$SE = \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

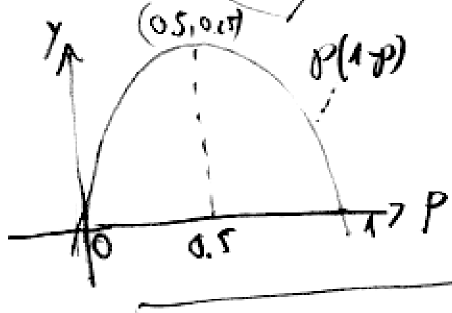
בקירוב

טעות התקן

חוק המספרים הגדולים
ככל ש-n גדל סטיית התקן קטנה וסביר יותר ש-$\hat{p} = p$ וכך טעות האמידה תהיה קטנה יותר.

* כאשר $n \to \infty$ אז $\hat{p} = p$

נמצא את טעות התקן המקסימלית



הסבר לכך ש-SE מקסימלי כש-$\hat{p} = \frac{1}{2}$
פרופורציה באוכלוסיה במחצית חצי-חצי (בנים, בנות לדוגמא) הסיכוי שהמדגם יוצא פרופורציה שונה גבוה יותר מאשר אם יש יותר בנים מבנות או להפך, ככל שיש יותר בנים באוכלוסיה יש יותר סיכוי לדגום בנים ולקבל מדגם שקרוב לפרופורציה האמיתית.

$$\boxed{SE = \sigma(\hat{p}) \leq \sqrt{\frac{1}{4n}}}$$

---

* אמידת p ע"י $\hat{p}$: אמידה נקודתית
* אמידת p ע"י תחום שבו נצפה למצוא את p ברמת ביטחון מסוימת: רווח בר סמך.

רווח סמך של פרופורציה

הפרופורציה המדגמית בסיס לאומדן הפרופורציה באוכלוסיה

$$\hat{p} - \square < p < \hat{p} + \square$$

$$P(\hat{p} - \square < p < \hat{p} + \square) = 1 - \alpha$$ רמת הביטחון

נמצא את $\square$:

$$P(p - \square < \hat{p} < p + \square) = 1 - \alpha$$

מדגם גדול

$$\hat{p} \sim N(p, SE^2)$$

$$\Phi\left(\frac{p + \square - p}{SE}\right) - \Phi\left(\frac{p - \square - p}{SE}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Phi\left(\frac{\square}{SE}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\square}{SE} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

רווח סמך עבור p, פרופורציה לא ידועה
על סמך מדגם בגודל n (גדול)
כרמת ביטחון $1-\alpha$:

$$\boxed{\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \underbrace{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}_{SE = \sigma(\hat{p})} \leq p \leq \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

מה עשינו?

חקרנו לגלות מהו p

עשינו מדגם

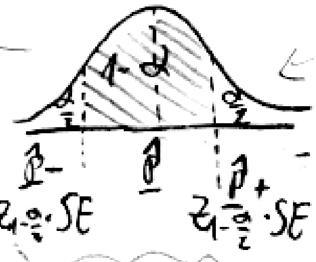
מצאנו $\hat{p}$

מצאנו $\sigma(\hat{p})$ בקירוב (עם $\hat{p}$ במקום p)

↓ חוק המספרים הגדולים

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

התפלגות $\hat{p}$ עם הגבלות:



$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-(1-\frac{\alpha}{2})} = Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$\hat{p}$ מתפלג נורמלית סביב האמיתי p
אבל p לא ידוע. אז אנחנו יודעים
ש $1-\alpha$ מהזמן $\hat{p}$ נמצאת בתחום
$\hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} SE$ ו- $\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} SE$
אז כמו הביטחון של $1-\alpha$
שבתחום זה יימצא p.

* הערה: ניתן להגיד שהתוצאות של
רווח בר-סמך לא מאוד מדויק
כי σ נמדד ע"י $\hat{p}$
שאומר ההתפלגות לא מדויק.

אורך רווח הסמך:

$$d = 2Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot SE$$

אורך רווח הסמך · רמת הביטחון · סטיית תקן כפונקציה של n

אם רוצים ברמת ביטחון $1-\alpha$, רווח סמך באורך d_0
נצטרך n כזאת:

$$2Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4n}} \le d_0$$

SE מקסימלי

* חצי אורך רווח סמך $\ge |\hat{p}-p|$ טעות הדגימה

$$\hat{p}-\square \qquad \hat{p} \qquad \hat{p}+\square$$

הגדרה המקרה הכללי לרווחי סמך של פרמטרים אחרים.

אם א. $O \sim N$ observe - אומד

ב. $E(O)=\theta$ — אומד חסר הטיה - בממוצע נצפה שיקבל את ערך הפרמטר

הפרמטר (כמו p) · תוצאת האומד (כמו $\hat{p}$)

אז רווח סמך ל-θ עם האומד O ברמת ביטחון $1-\alpha$:

$$\boxed{O - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot SE \le \theta \le O + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot SE}$$

רווח סמך עבור תוחלת לא ידועה באוכלוסיה

(1) מדגם גדול
סטיית תקן ידועה

רוצים לבנות את μ
עושים גודל המתפלג את $\bar{x}$, ממוצע המדגם

$n \ge 30$

א. $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

ב. $E(\bar{x}) = \mu$ — $\bar{x}$ אומד חסר הטיה ל-μ

$$\boxed{\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$d = 2 \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

* אורך רווח הסמך
* גבול טעות האמידה

$$\underbrace{|\bar{X} - \mu|}_{\text{טעות האמידה}} \leq \frac{1}{2} \cdot d$$

כמה צריך לדגום כדי שרווח הסמך לא יעלה על אורך מסויים ברמת בטחון $1-\alpha$?

$$2 Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d_0$$

$$\left(\frac{2 Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{d_0} \right)^2 \leq n$$

(2) מדגם גדול

סטיית תקן ידועה

במדגם גדול לא נדרשת נורמליות במשפט הגבול המרכזי. במקרה זה נניח שהאוכלוסיה שלנו מתפלגת נורמלית.

* משפט: אם משתנים מקריים בלתי-תלויים מתפלגים נורמלית גם סכומם והפרשם מתפלג נורמלית.

$x_i \sim N$ הנחה

הנחה בלתי תלוי

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim N$$

$$\frac{\sum x_i}{n} = \bar{x} \sim N$$

רווח הסמך יהיה כרגיל

(3) מדגם גדול

σ לא ידועה

נאמוד את σ מהמדגם:

$$\boxed{S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1}}$$

תיקון הטייה

* במדגמים גדולים S מקבלת ערכים שקרובים ל-σ בסבירות גבוהה. לכן נחליף את σ ב-S בנוסחת רווח הסמך:

$$\boxed{\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

④ **מדגם קטן**
σ לא ידועה

* נניח שהאוכלוסיה מתפלגת נורמלית.

במדגם קטן יש סטי' גדול של S, סטיית התקן המדגמית תהיה רחוקה מ- σ, סטיית התקן האמיתית.
ככל ש n קטן יותר כך יש סטי' גדולה יותר של S מ(?) קרובה ל- σ ולכן יש לקחת בחשבון רווח סמך רחב יותר.
לשם כך נשתמש בהתפלגות t, שלוקחת בחשבון את מספר התצפיות: $n-1$ דרגות חופש.

תקנון

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{SE}} = Z \sim N(0,1) \qquad \frac{X-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = t \sim t(n-1)$$

student distribution

* כאשר $n \to \infty$ שואף אז $S \to \sigma$ ואז $t \to Z$

רווח סמך עבור μ, כאשר σ לא ידועה,
באוכלוסיה בעלת סטיית תקן לא ידועה, זה מדגם קטן מבצע
ברמת בטחון $1-\alpha$:

$$\boxed{\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

<u>דרגות חופש</u> - הסבר
ככל שהמדגם קטן יותר t גדולה יותר כי S רחוקה יותר מ- σ האמיתית
ולכן המדגם קטן יותר רווח הסמך רחב יותר עבור אותה רמת בטחון.

רווחי סמך להפרשים

<u>הפרש פרופורציות</u>
נדגום שתי אוכלוסיות בלתי-תלויות.
הפרמטר: $\theta = P_x - P_y$
האומד: $O = \hat{P}_x - \hat{P}_y$

מדגמים ב"ת

מדגם X	מדגם Y
$n>30$	$m>30$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\hat{p}_x \sim N\left(p_x, \frac{p_x(1-p_x)}{n}\right)$	$\hat{p}_x \sim N\left(p_y, \frac{p_y(1-p_y)}{m}\right)$

מ. גבול מרכזי

אם משתנים מקריים ב"ת מתפלגים נורמלית אז סכום והפרש מתפלג נורמלית

$$\hat{p}_x-\hat{p}_y \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$E(\hat{p}_x-\hat{p}_y)=E(\hat{p}_x)-E(\hat{p}_y)=p_x-p_y$$

$$SE=\sigma(\hat{p}_x-\hat{p}_y)=\sqrt{V(\hat{p}_x-\hat{p}_y)}=\sqrt{V(\hat{p}_x)+V(-\hat{p}_y)+\underbrace{2cov(\hat{p}_x,-\hat{p}_y)}_{cov=0 \text{ ב"ת}}}=\sqrt{V(\hat{p}_x)+V(+\hat{p}_y)}$$

$$\hat{p}_x-\hat{p}_y \sim N\left(p_x-p_y, \frac{p_x(1-p_x)}{n}+\frac{p_y(1-p_y)}{m}\right)$$

רווח סמך להפרש פרופורציות, מדגמים ב"ת, $n,m>30$

$$\boxed{\hat{p}_x-\hat{p}_y \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}+\frac{\hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{m}}}$$

כש p_x, p_y לא ידועות נחליף בפרופורציות המדגמים

רווח סמך להפרש תוחלות

(1) **מדגמים גדולים וסטיות תקן ידועות**

פרמטר: $\theta: \mu_x-\mu_y$

אומד: $\hat{\theta}: \bar{X}-\bar{Y}$

מדגם אקראי X	מדגם אקראי Y
$n\geq 30$	$m\geq 30$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\bar{X}$	$\bar{Y}$
$\downarrow$ משפט גבול מרכזי	$\downarrow$
$\bar{X} \sim N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{n}\right)$	$\bar{Y} \sim N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y^2}{m}\right)$

$\downarrow$

* בעצם: משתנים ב"ת מ"מים שמתפלגים נורמלית
הפרש שלהם גם מתפלג נורמלית.
* ג"כ הממוצעים במדגמים ב"ת זה מזה

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_x-\mu_y,\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}\right)$$

2. <u>סטיית תקן ידועה, מדגמים קטנים</u>

מניחים שהאוכלוסיה מתפלגת נורמלית

3. <u>סטיית תקן לא ידועה מדגמים גדולים</u>

מחליפים σ ב S. מניחים שזה בסדר קירוב
כי המדגמים גדולים.

4. <u>סטיית תקן לא ידועה, מדגמים קטנים</u>

<u>תנאי</u> $\sigma_x=\sigma_y$ לפי מבחן F שמשווה של המדגמים
בודקים לפי S

לשתי האוכלוסיות אותה σ נאמוד אותה ע"י שני המדגמים יחד: S_{pool}

$$SE=\sigma(\bar{X}-\bar{Y})=\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}\underset{\sigma_x=\sigma_y}{=}\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}=\sigma\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}=\boxed{S_p\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$$

$$S_p=\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2+\Sigma(x_i-\bar{y})^2}{n+m-2}}$$

רווח סמך, הפרש תוחלות, שתי אוכלוסיות נורמליות
סטיית תקן לא ידועה אך שווה, שני מדגמים ב"ת
ברמת ביטחון $1-\alpha$:

$$\boxed{\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\leq\mu_x-\mu_y\leq\ldots}$$

$$* \quad S_x=\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}\Rightarrow(n-1)S_x^2=\Sigma(x-\bar{x})^2\Rightarrow S_p=\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}}$$

מדגמים

לבדוק האם תרופה משפיעה על אסתמה

נעדיף שכן שיש הבדל בין הקבוצות לפני הטיפול

דרך 1 בודקת שתי קבוצות שונות - $\boxed{\text{מדגמים ב"ת}}$
אחת קיבלה טיפול אחד ואחת לא.
פרמטר $\mu_x-\mu_y$ אומד $\bar{X}-\bar{Y}$

דרך 2 בודקת אותה אוכלוסיה לפני ואחרי: $\boxed{\text{מדגמים תלויים}}$

פתרון:

פרמטר μ_D תוחלת הפרש

אומד $\bar{D}_{ifference}$ ממוצע ההפרשים

i	1	2 ...
x_i לפני	100	90 ...
y_i אחרי	100	100 ...
y_i-x_i הפרש	0	10 ...

ציון: ממוצע ההפרשים:

$$S_D=\sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$$

התפלגות: $\bar{D}\sim N\left(\mu_D,\frac{\sigma^2}{n}\right)$

תלוי בגודל המדגם:

מדגם קטן

$$\boxed{\bar{D}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}\le\mu_D\le\ldots}$$

בדיקת השערות

H_0 השערת ה-0 P = הפרופורציה כיום

H_1 ההשערה האלטרנטיבית על הפרופורציה כיום

עושים מדגם ומוצאים את פרופורצית המדגם $\hat{p}$

* אם $\hat{p}$ רחוק מאוד, קיצוני ← נדחה את H_0
* אם $\hat{p}$ בטווח דגימה סביר ← נקבל את H_0

טעות מסוג ראשון

$$P\left(\begin{matrix}\text{דחיית}\\ H_0\end{matrix} \middle| \begin{matrix}H_0\\ \text{נכונה}\end{matrix}\right) = \alpha$$

ויתור על חשוד טהור
חיפוש שלא עובר סינון במבחן המציאות

טעות מסוג שני

$$P\left(\begin{matrix}\text{קבלת}\\ H_0\end{matrix} \middle| \begin{matrix}H_0\\ \text{שגויה}\end{matrix}\right) = \beta$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{נקבל}\\ H_0\end{matrix} \middle| \begin{matrix}H_0\\ \text{נכונה}\end{matrix}\right) = 1-\alpha$$ רמת הביטחון

$$P\left(\begin{matrix}\text{נדחה}\\ H_0\end{matrix} \middle| \begin{matrix}H_0\\ \text{שגויה}\end{matrix}\right) = 1-\beta$$ עוצמה

מציאות / החלטה	H_0 נכונה	H שגויה
דחיית H_0	α טעות מסוג ראשון רמת מובהקות	$1-\beta$ עוצמה
קבלת H_0	$1-\alpha$ רמת ביטחון	β טעות מסוג שני
	1	1	2

α ו-β תלויות אחת בשניה:
ככל שנרצה למנוע טעות מסוג ראשון
נקטין את α (שזו לדחות את H_0 בהנחה שהיא נכונה)
אבל ככל שנתעקש לבדוק את H_0 הסיכוי לקבל את H_0
בטעות הוא טעות גדל = β.

<u>רמת מובהקות</u>: אחוז המקרים (מתוך הרבה מדגמים) שנדחה
לדחות את H_0 תחת ההנחה ש-H_0 נכונה

<u>תהליך במקרה לבדיקת השערות</u>

① ציון <u>הפרמטר</u> הלא ידוע בשאלה וסימונו
P: שיעור ההתנדבות בקרב בני הקיבוצים למיזם דרכי"ת למחרת
② ניסוח פורמלי של <u>ההשערות</u>

H_0: $P=0.8$ אין שינוי בשיעור ההתנדבות
H_1: $P<0.8$ חשש שמא חלה ירידה בשיעור ההתנדבות

③ <u>נתונים</u>: $n=100$
$\hat{p}=0.77$
$\alpha=5\%$ רמת המובהקות

④ נברר <u>התפלגות תחת H_0</u> כדי לקבוע את גודל הסבירות
של $\hat{p}$ ביחס להשערת האפס
בחינת האומד תואמת (מדגם) גדול מספיק:
$np>5$
$n(1-p)>5$

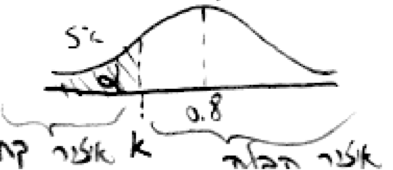
$$\downarrow$$

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$\downarrow$ מדגם גדול, התפלגות Z
(נורמלית רק Z)

$$\frac{\hat{p}-0.8}{0.04} = Z \sim N(0,1^2)$$

⑤ שלב <u>ההחלטה</u>: הסקת מסקנות ע"פ הערך הקריטי K
התפלגות $\hat{p}$ תחת H_0:



$$\frac{k-0.8}{0.04} = z_{0.05}$$

$$\downarrow$$

$$k = 0.734$$

נשווה את הפרופורציה המדגמית לסף הקריטי:

$$k = 0.73 < \hat{p} = 0.77$$

$$\downarrow$$

נקבל את H_0

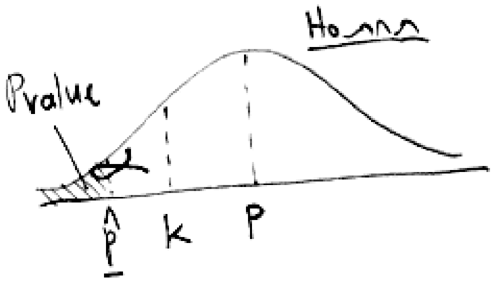
תהליך המבחן (ההשערה) קובע האם לקבל או לדחות את H_0 לא האם H_0 נכונה או מוטעית (כי זו עובדה מציאותית)

בהנחה ש-H_0 נכונה ב-α% מהמקרים נדחה אותה לב' (טעות) נקבלה.

<u>הסקה מבוססת על רמת מובהקות תוצאות המדגם</u>

Pvalue גודל הקיצוניות של תוצאות המדגם ביחס ל-H_0.

כלומר אחוז התוצאות הקיצוניות יותר מתוצאות המדגם תחת H_0



אם

$\hat{p} < k$

או

Pvalue $< \alpha$

נדחה את H_0

3 מקרים של בדיקת השערות עבור פרמטר θ

$H_0: \theta = a$ ①

$H_1: \theta < a$

Pvalue= שטח משמאל לתוצאת המדגם

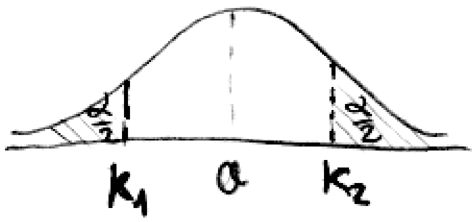
$H_0: \theta = a$ ②

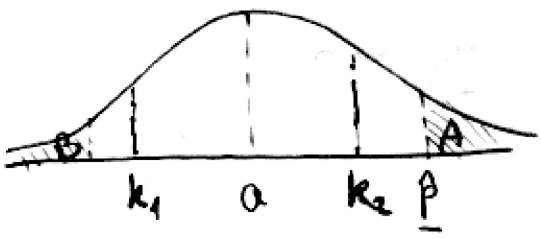
$H_1: \theta > a$

Pvalue= שטח מימין לתוצאת המדגם

$H_0: \theta = a$ ③

$H_1: \theta \neq a$





Pvalue= A+B איזור התחום שקיצוני יותר מתוצאת המדגם

נמצא את הסיכוי לטעות בסוג שני: β

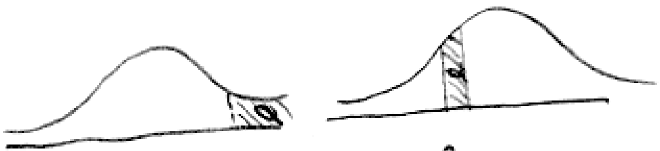
$$\beta = P\left(\text{קבלת } H_0 \mid H_0 \text{ שגויה}\right)$$

H_0 נתונה: נמצא את הערך הקריטי בעזרו נכתוב את H_0, תחת H_0.
נבדוק את הסיכוי לקבל ערך פחות קיצוני מ-k תחת H_1.

$$P\left(\text{הממוצע פחות קיצוני מ-}k\text{ תחת } H_0 \mid H_0 \text{ שגויה, תחת } H_1\right)$$

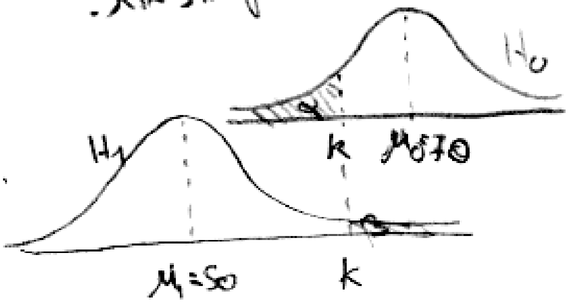
* α קובעת את גודל אזור הדחייה:

לדוגמא:

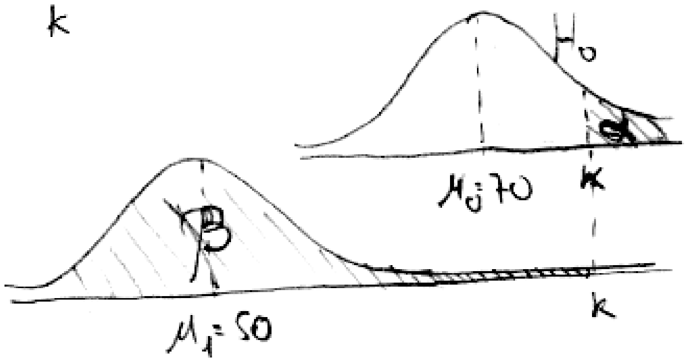


* β קובעת את מיקום של אזור הדחייה
נשאף שהדגימות תהיינה ביותר תחת H_0 ובכך β מינימלית.

לדוגמא:



ולכן:



* כאשר נקבל אזור דחייה וקבלה ונרצה לחשב α ו-β:

פרמטר: סיכוי לבן בהצלחה בודדת

השערות: ... שנבנו

$H_0: p=0.5$

$H_1: p=0.7$ מראים

סטטיסטי: הערך "המעניין" בהגבלה שעליו נסתכל.
X- מספר הבנים שהתקבלו.

התפלגות הסטטיסטי תחת ההשערות

$H_0: X \sim G(0.5)$

$H_1: X \sim G(0.7)$

דוגמא שנייה

קביעת אזורי דחייה וקבלה

דחייה $\{X \geq 3\}$ קבלה $\{X < 3\}$ ⇐ חישוב α ו-β

הליך מספר למציאת α, β על גודל נתון:

① פרמטר – מה שרוצים לגלות: n – מספר המשתתפים בניסוי (המספר שהתכוונתי לו אורחים)

② השערות:

$H_0: n=500$

$H_1: n=400$

③ סטטיסטי: X – מספר התלמידים מבין המשתתפים.

הנתון שמספק מבחינה ולפיו נחליט אם ההשערה נכונה.

④ התפלגות הסטטיסטי תחת ההשערות

$H_0: X\sim B(500,0.6)$

$np=30$, $n(1-p)=200$ >5

↓ ע. גבול מרכזי

$X\sim N(300,120)$

np, $np(1-p)$

$H_1: X\sim B(400,0.6)$

$np=240$, $n(1-p)=160$ >5

↓ ע. גבול מרכזי

$X\sim N(240,96)$

⑤ אזורי דחיה וקבלה

דחיה: $\{X\leq 299\}$

קבלה: $\{X\geq 300\}$

חסר: מבחני חי בריבוע
לבדיקת אי-תלות וטיב התאמה

דף נוסחאות

רווח סמך

מה אומדים?	סטיית התקן ידועה $SE=$ (מדגם גדול – ע"פ גבול מרכזי / מדגם קטן – תחת אוכלוסיה נורמלית)	סטיית התקן לא ידועה / מקורבת $SE\approx$ – מדגם גדול (גבול מרכזי)	סטיית התקן לא ידועה / מקורבת $SE\approx$ – מדגם קטן (תחת אוכלוסיה/שינוי נורמלית)
תוחלת μ	$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq$	$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\leq\ldots$	$\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\leq\ldots$
הפרש תוחלות $\mu_x-\mu_y$ מדגמים בת"ת	$(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}\leq$	$(\bar{X}-\bar{Y})-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{S_x^2}{n}+\frac{S_y^2}{m}}\leq\ldots$	$(\bar{X}-\bar{Y})-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\leq$ סטיית התקן האוכלוסיה שווה ולא ידועה
תוחלת שינוי μ_D מדגמים תלויים	סטיית התקן לעולם אינה ידועה	$\bar{D}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S_D}{\sqrt{n}}\leq\ldots$	$\bar{D}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}\leq\ldots$
פרופורציה p	כשרוצים לבנות רווח סמך לפרופורציה p לא ידועה, ולכן גם SE לא ידועה, נחשב אותה לפי האומד של p	$\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\leq\ldots$	מאחר ו-p לא ידועה לא ניתן לחשב SE במדגם קטן
הפרש פרופורציות P_x-P_y מדגמים בת"ת		$(\hat{p}_x-\hat{p}_y)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{n}+\frac{\hat{p}_y(1-\hat{p}_y)}{m}}\leq$	

נוסחאות עזר

$\hat{p}=\frac{X}{n}=\frac{\text{מספר הצלחות}}{\text{גודל המדגם}}$ | $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ | $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{n-1}}$ | $S_p=\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}}$

בדיקת השערות

1. זיהוי הפרמטר הלא ידוע — שיעור המצביעים (אחוז) p: יחסית
2. השערות:

$H_1<H_0$ (I) | $H_0<H_1$ (II) | $H_0\neq H_1$ (III)

$H_0: p=0.5$ לא שינוי
$H_1: p<0.5$ קטן

3. נתונים: n, $\hat{p}$, α
4. התפלגות האומד תחת H_0:

תנאים למשפט הגבול המרכזי

- תוחלת: $n<30$ → תחת אוכלוסיה נורמלית; $n\geq30$
- פרופורציה: p לא ידועה → $n\geq30$; p ידועה → $n(1-p)>5$, $np>5$

⇓

התפלגות נורמלית של האומד (U)

$(Z/t,\ S/\sigma)$ → תקן

Pvalue / α

$\frac{\hat{p}-0.5}{0.04}=Z\sim N(0,1)$

5. החלטה: אזורי דחייה וקבלה → החלטה

מציאת α, β במבחן נתון

1. פרמטר
2. השערות
3. סטטיסטי + נתונים
4. התפלגות הסטטיסטי
   - תחת H_0
   - תחת H_1
5. אזורי דחיה וקבלה
6. חישוב α, β

החלטה \ מציאות	H_0 נכונה	H_0 שגויה
דחית H_0	α טעות I רמת מובהקות	$1-\beta$ עוצמה
קבלת H_0	$1-\alpha$ רמת ביטחון	β טעות II
	1	1

2

χ^2 אי-תלות / התאמה

קטגוריה	O	E

השערות: תלוי / לא תלוי; יש קשר / אין קשר

חישוב: $\chi^2=\sum\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$

מציאת: $\chi^2_{0.95}(n-1)=?$

החלטה

לבדיקת אי-תלות: $df=(n-1)(m-1)$

$(n-1)$ לבד התאמה
$(n-1)(m-1)$ אי-תלות

נערכים ניסויים ב"ת זה בזה
בכל ניסוי הסיכוי להצלחה זהה - p

בכל ניסוי 2 תוצאות אפשריות בלבד (הצלחה/כישלון)

X מספר הניסיונות עד וכולל הצלחה ראשונה	נערכים n ניסויים → X מספר ההצלחות מבין n ניסויים	X מקבל ערכים שלמים בין שני ערכים	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ → $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$	
$X \sim G(p)$	$X \sim B(n,p)$	$X \sim U(a,b)$	$Z \sim N(0,1^2)$	
$(1-p)^{k-1}\cdot p$ $P(X>n)=(1-p)^n$ $P(X=m+n \mid X>n)=P(X=m)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\frac{1}{b-a+1}$	0 $P(X>k)=\Phi(z)$ $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$ $-z\ 0\ z$	$P(X=k)$
$\frac{1}{p}$	$n\cdot p$	$\frac{a+b}{2}$ סימטרית: אמצע התחום	μ	$E(X)=\sum k_i\cdot P(X=k_i)$
$\frac{1-p}{p^2}$	$np(1-p)$		σ^2	$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E[X-E(X)]^2$

$P(X=k)$ הסיכוי שפריט באוכלוסיה יהיה תכונה מסויימת

$P(X=m)$ הסיכוי שממוצע X פריטים בעלי התכונה במדגם נתון

$P(\hat{p}=L)$ הסיכוי שלהתפלגות פרופורציה מסויימת של התכונה במדגם נתון

$X \sim B(n,p)$
$\vdots$
$\sum x_i = X$

$\boxed{np>5}$ וכן $\boxed{n(1-p)>5}$
משפט הגבול המרכזי

$X \sim N(np, np(1-p))$

$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$\boxed{n \geq 30}$
משפט הגבול המרכזי

$\sum x_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

אורך רווח סמך נדרש

$d_0 \geq 2Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot SE$

במקרה תוחלת

$SE=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$n \geq \frac{4Z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma^2}{d_0^2}$

במקרה הפרופורציה

$SE=\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

max

$d_0 \geq 2\cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{4n}}$

$n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d_0}\right)^2$

מזווגים

i	1	2	...
לפני X_i	100	90	...
אחרי Y_i	100	100	...
הפרש X_i-Y_i	0	10	...

$\bar{D}=$

$S_D=\sqrt{\frac{\sum(D_i-\bar{D})^2}{n-1}}$